1173. 有向集合ニ関スル一補題

岩村　聯（名大）

§1. 反射的ナ関係 $\prec$ ノ定義サレタ集合Mが次ノ性質ヲ有スルトキ，Mヲ $\prec$ 有向集合ト言ヒマス：Mノ任意ノ有限部分集合 X ニ対シテ適当ナ $y \in M$ ヲ取レバ，スベテノ $x \in X$ ニ対シテ $x \prec y$. コレハ関係 $\prec$ が推移的ナラバ，普通ノ有向集合ノ定義ト一致シマス。以後ギリシヤ小文字デ超限順序数ヲ表スコトニスレバ，我々ノ補題ハ：

$\prec$ 有向集合 M が無限集合ナラバ，M ノ部分集合ノ系列 $\{M_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ デ次ノ性質ヲ有スルモノが存在スル：

(1) 各 M_α ハ $\prec$ 有向集合

(2) 各 M_α ノ濃度 $\bar{\bar{M}}_\alpha < \bar{\bar{M}}$

(3) $\alpha < \beta < \lambda$ ノトキ $M_\alpha \subseteq M_\beta$

(4) $M = \bigcup_{\alpha < \lambda} M_\alpha$ （合併集合）

証明：選択公理ニヨレバ次ノ性質ノアル函数 f が存在シマスカラ，ソノ一ツヲ固定シテ考ヘマス：M ノスベテノ有限部分集合 X ニ対シテ $f(X) \in M$ が（*unique* ニ）定マリ，スベテノ $x \in X$ ニ対シテ $x \prec f(X)$.

補題ハ $\bar{\bar{M}} = \aleph_0$ ノトキハ殆ンド明カデスが，念ノタメニ証明スレバ次ノ通リ。M ノ有限部分集合ノ単調増大列

$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots\cdots \subseteq X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq \cdots\cdots$ デ $M=\bigcup_n X_n$ ナルモノ(ガ存在シマスカラ其ノ一ツ)ヲ取ッテ，帰納法デ，X_0 ニ $f(X_0)$ ヲ附ケ加ヘタモノヲ M_0，$X_{n+1}\cup M_n$ ニ $f(X_{n+1}\cup M_n)$ ヲ附ケ加ヘタモノヲ M_{n+1} ト定義スレバ $\prec$ ガ反射的ナ関係デスカラ各 M_n ハ $\prec$ 有向集合（性質1)；又 $\overline{\overline{M_0}} < \aleph_0$ ハ明瞭，$\overline{\overline{M_n}} < \aleph_0$ ナラバ $\overline{\overline{M_{n+1}}} < \aleph_0$ ニ進ンデ，スベテノ M_n ニツイテ $\overline{\overline{M_n}} < \aleph_0$（性質2)）；又定義カラ $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots\cdots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq \cdots\cdots$（性質3)）；最後ニ $M=\bigcup_n X_n$ ト $X_n \subseteq M_n \subseteq M$ トカラ $M=\bigcup_n M_n$ ガ出マス（性質4)）.

次ニ $\overline{\overline{M}} > \aleph_0$ ノトキ，任意ノ $N \subseteq M$ ニ對シテ $F_1(N) = N \cup \{ f(X) \mid X \subseteq N,\ \overline{\overline{X}} < \aleph_0 \}$ トシ，帰納法デ $F_{n+1}(N) = F_1(F_n(N))$ トシテ

$$F_1(N) \subseteq F_2(N) \subseteq \cdots\cdots$$

ヲ定メテ，$F_\omega(N) = \bigcup_n F_n(N)$ ト置キマス（$n=1,2,\cdots\cdots$）.

此ノトキ $X \subseteq F_\omega(N)$, $\overline{\overline{X}} < \aleph_0$ ナラバ X ハ或ル $F_n(N)$ ニ含マレ，従ッテ $f(X) \in F_\omega(N)$. ソレ故

1)′ $F_\omega(N)$ ハ $\prec$ 有向集合

次ニ $\{ X \mid X \subseteq N,\ \overline{\overline{X}} < \aleph_0 \}$ ノ濃度ハ，$\overline{\overline{N}} < \aleph_0$ ナラ $< \aleph_0$，$\overline{\overline{N}} \geqq \aleph_0$ ナラ $= \overline{\overline{N}}$，何レニシテモ $\leqq \overline{\overline{N}} \cdot \aleph_0$.

従ッテ $\overline{\overline{F_1(N)}} \leqq \overline{\overline{N}} \cdot \aleph_0$

帰納法デ $\overline{\overline{F_n(N)}} \leqq \overline{\overline{N}} \cdot \aleph_0$.

故ニ　$\overline{\overline{F_\omega(N)}} \leqq \overline{\overline{N}} \cdot \aleph_0$。

ココデ　$\overline{\overline{M}} > \aleph_0$ ヲ使ヘバ

$2)'$　$\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{M}}$ ノトキ　$\overline{\overline{F_\omega(N)}} < \overline{\overline{M}}$

又，明カニ

$3)'$　$N \subseteq N'$ ノトキ　$F_\omega(N) \subseteq F_\omega(N')$

$4)'$　$N \subseteq F_\omega(N) \subseteq M$

サテ整列定理ニヨレバ M ノ部分集合ノ系列 $\{N_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ が存在シテ

$2)''$　$\overline{\overline{N_\alpha}} < \overline{\overline{M}}$

$3)''$　$N_\alpha \subset N_\beta \quad (\alpha < \beta < \lambda)$

$4)''$　$M = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} N_\alpha$

ソコデ $M_\alpha = F_\omega(N_\alpha)$ ト置ケバ $1)'$ カラ $1)$，$2)'$ 及ビ $2)''$ カラ $2)$，$3)'$ 及ビ $3)''$ カラ $3)$，$4)'$ 及ビ $4)''$ カラ $4)$ が出テ証明が終リマス。

証明ヲ上記ノ様ニ簡単ニ述ベルコトが出来タノハ伊藤清先生ノ御注意ニヨルモノデアルコトヲ附言シテ，同先生ヘノ感謝ノ意ヲ表シマス。

§2．前§ノ補題ハ J. von Neumann ノ "Zur allgemeinen Theorie des Masses" (Fund Math 13) ニ見出サレル誤リヲ訂正シヨウトシテ到達シタモノデスが，他ニモ使ヘサウニ思ヒマスノデ，應用ノ例

トシテ其ノ訂正モ述ベテ見マス.

上記論文ニ次ノ定理ガアリマス:

群 $\mathfrak{G}$ ノ部分群ノナス $\subseteq$ 有向集合 M ガアッテ $\mathfrak{G} = \bigcup_{\mathfrak{H} \in M} \mathfrak{H}$ 且ツ各 $\mathfrak{H} \in M$ ガ可測デアルトスル. 此ノトキ $\mathfrak{G}$ ハ可測デアル。

此処デ, 不必要ナガラ, 群 $\mathfrak{G}$ ガ可測デアルトイフ事ノ定義ヲ附言シマスト: $\mathfrak{G}$ ノスベテノ部分集合ニ對シテ定義サレタ有限加法的測度 μ デ $\mu(\mathfrak{G}) = 1$ 且ツ左不変: $\mu(a\mathfrak{M}) = \mu(\mathfrak{M})$ $(\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G},\ a \in \mathfrak{G})$ ナルモノガ存在スルトキ $\mathfrak{G}$ ハ可測デアルトイハレル。

von Neumann ハ特ニ M ガ $\subseteq$ 整列集合デアル場合ニツイテ定理ヲ, 多少言ヒ足リヌ所モアリマスガ, 巧妙ニ証明シテ居リマス。

一般ノ場合ヲコノ特殊ナ場合ニ帰着サセルトコロニ誤リガアリマスノデ, 其処ダケヲ我々ノ補題デ証明シテ見マス。

先ヅ $\overline{\overline{M}} < \aleph_0$ ノトキハ $\mathfrak{G} \in M$ デ trivial. $\aleph$ ヲ或ル超限計量数トシ, $\overline{\overline{M}} < \aleph$ ノトキハ定理ガ成立スルモノト假定シ, $\overline{\overline{M}} = \aleph$ ノトキニ証明シマス. $\overline{\overline{M}} = \aleph$ トシテ, 補題ノヤウナ $\{M_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ ($<$ ノ代リニ $\subseteq$, 即チ集合ノ包含関係ヲ置ク) ヲ取リ

$$\mathfrak{G}_\alpha = \bigcup_{\mathfrak{H} \in M_\alpha} \mathfrak{H} \quad (\alpha < \lambda)$$

トスレバ，上ノ假定ト補題ノ 1)，2) トニヨッテ，$\mathfrak{O}_\alpha$ ハ何レモ可測．又 3) ニヨッテ $\{\mathfrak{O}_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ ハ $\subseteq$ 整列集合．又 4) ニヨッテ $\mathfrak{O} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathfrak{O}_\alpha$．

従ッテ，前記ノ特殊ナ場合ニ関スル定理ニヨッテ，$\mathfrak{O}$ が可測ニナリマス。